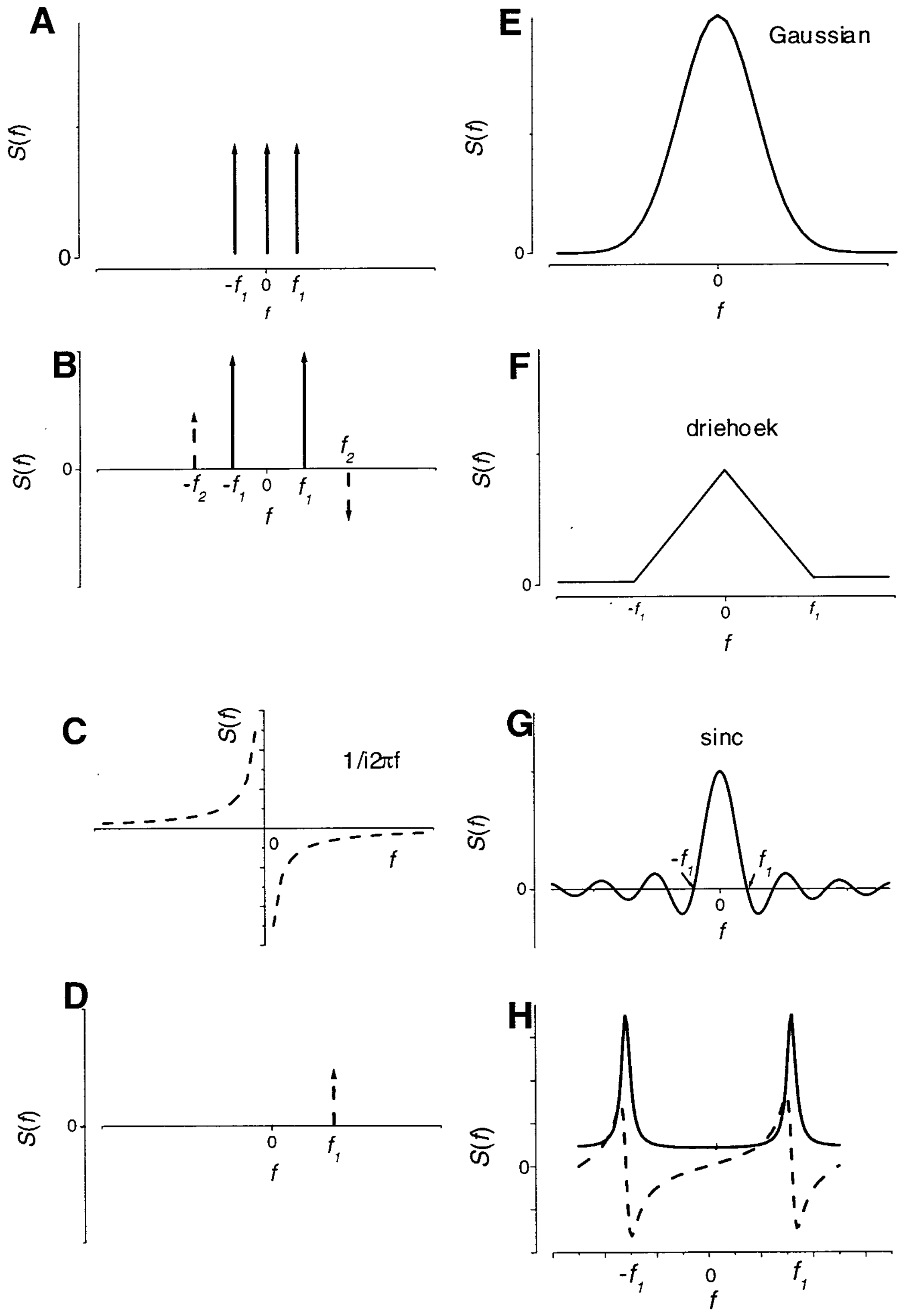
Tentamen Signaalanalyse, 2 maart 2001 13.00-16.00 u

Gebruik voor de beantwoording van elke vraag een apart vel met daarop aangegeven je naam en het vraag- en onderdeelnummer dat je beantwoordt.
Zet op het eerste blad het totale aantal ingeleverde vellen.

vraag 1:
Schets van elk van de onderstaande (complexe) spectra, $S(f)$, de bijbehorende tijdsignalen $s(t)$. Getrokken lijnen stellen reële waarden voor, onderbroken lijnen imaginaire waarden. Houd er rekening mee dat de gevraagde signalen ook reële en imaginaire componenten kunnen hebben. Let ook op de schaling van de tijdsas, die met de aangegeven frequenties, f_1 en f_2, samenhangt.



vraag 2:

Neem aan dat $s(t)$ een reëel bandbegrensd tijdsignaal is waarvoor geldt:

$$S(f) \neq 0 \quad \text{voor} \quad |f| < B/2 \qquad \text{en} \qquad S(f) = 0 \quad \text{voor} \quad |f| \geq B/2$$

Neem verder aan dat $p(t)$ een periodieke rechthoekige pulstrein met periode T is. De pulsen daarvan hebben duur $\tau(\leq T)$en hoogte $\frac{1}{\tau}$. Definieer verder: $w(t) = s(t) \cdot p(t)$.

a) Laat zien dat de coëfficiënten, p_n van de Fourier-reeks van $p(t)\left(= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \exp(i\frac{2\pi nt}{T})\right)$ worden gegeven door: $p_0 = \frac{1}{T}$ en $p_n = \frac{1}{T}\text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$ voor $n \neq 0$.

b) Het continue spectrum van $p(t)$ wordt dan gegeven door: $P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \cdot \delta(f - \frac{n}{T})$. Geef met gebruikmaking hiervan een uitdrukking van het spectrum, $T \cdot W(f)$, in termen van $S(f)$,T en τ. Maak ook een schets van $T \cdot W(f)$ tussen $-\frac{5}{T}$ en $\frac{5}{T}$. Neem voor deze schets aan dat $\tau = \frac{1}{4}T$, dat $S(f)$ symmetrisch is rond $f = 0$ en dat $B < \frac{1}{T}$.

c) Leg uit dat voor $\tau \to 0$ het signaal $w(t) = s(t) \cdot p(t)$ als een bemonsterde versie van $s(t)$ opgevat kan worden en laat zien dat dan geldt: $P(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$. Geef ook voor dit geval een uitdrukking van $T \cdot W(f)$.

d) Geef een uitdrukking voor $T \cdot W(f)$ als $\tau \to T$ en interpreteer dit in het tijdsdomein.

e) Beschouw nu opnieuw het product $w(t) = s(t) \cdot p(t)$ met $\tau \to 0$, zoals in onderdeel c. Convolueer $w(t)$ nu met een blokpuls met duur T en hoogte 1 en noem het resultaat $q(t)$. Maak een schets van $q(t)$ en leg uit waarom $q(t)$ kan worden opgevat als een "sample and hold" versie van $s(t)$.

f) Geef een uitdrukking voor $Q(f)$ en vergelijk in een schets de spectra $Q(f)$en $S(f)$. *Gegeven:* het spectrum van een blokpuls met duur T en hoogte 1 is: $T\text{sinc}(\pi fT)$.

vraag 3:

Beschouw het signaal $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ dat wordt bemonsterd door vermenigvuldiging met een deltapulstrein met een frequentie gelijk aan de "Nyquist rate", zo dat $t = 0$ één van de bemonsteringspunten is.

a) Laat zien dat de bemonsterde functie kan worden geschreven als:

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_0}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n+\frac{1}{2}}{f_0}\right).$$

b) Bepaal van beide reeksen de Fouriertransform en laat zien dat de som, $\hat{S}(f)$,daarvan gelijk is aan: $\hat{S}(f) = 2f_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - (2m+1)f_0)$. *Gegeven:* $FT\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right] = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$

c) Wat is de continue Fouriertransform, $S(f)$, van $s(t)$? Gebruik $S(f)$ om het resultaat zoals gegeven in onderdeel b) m.b.v. de "sampling" theorie af te leiden.

d) Beschouw nu een discreet filter waavan de uitgang, w_n, in respons op het ingangssignaal, s_n, wordt gegeven door: $w_n = \frac{s_n + s_{n-1}}{2}$. Karakteriseer dit type filter en maak een schets van een mogelijke realizatie van dit filter m.b.v. een elektrisch circuit.

e) Laat zien dat voor het kwadraat van de norm van de overdrachtsfunctie, $|\hat{H}(f)|^2$, van dit filter geldt: $|\hat{H}(f)|^2 = \frac{1+\cos(\pi \frac{f}{f_0})}{2}$ en maak daarvan een schets in de frequentie-range lopend van $-f_0$ tot f_0.

f) Maak in het frequentiedomein zowel als in het tijdsdomein duidelijk dat de gefilterde versie van de discrete serie s_n, behorend bij de bemonsterde versie van onderdeel a), nul oplevert.

vraag 4:

a) Beschrijf kort (hooguit in 5 regels) de gemiddelde periodogram-methode.

b) Van een gediscretiseerd random signaal moet het vermogensspectrum met behulp van de gemiddelde periodogram-methode worden bepaald. De vereiste frequentieresolutie (Δf) is 5 Hz terwijl de te bepalen waarden een gemiddelde relatieve nauwkeurigheid van 1% moeten hebben. Hoe lang moet worden gemeten?